第四章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

2023年9月6日 15:37

第三章 3.5 节笔记中，老头的课已经剧透了 Taylor 展开，并且在说明 求级数和求积分可交换（即可以逐项积分）时，说可以通过

$m\to\infty$，$\oint_{C} \frac{f(z)}{z}\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m dz \to 0$，$\left(|w|<|z|\right)$，（注意 R 可以 $\to 0$）来说明正确性。

$C = \partial B(w,R)$

这章给出更严谨的表述，以及复级数的一些理论。

4.1 Weierstrass 定理

先看数项级数。

对于数列 $\{z_n\}$ 定义其部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k$，那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 收敛。

第二章说过，$\mathbb{C}$ 作为度量空间完备，于是 $\{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 是柯西列，进而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ 收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{Z}_{>0}\ \text{s.t.}\ \left(n,m>N \Rightarrow |S_m-S_n| = |S_{n+1}+\cdots+S_m|<\varepsilon\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall p\in\mathbb{Z}_{>0}\left(n>N\Rightarrow |S_{n+1}+\cdots+S_{n+p}|<\varepsilon\right)$$

类似实级数，也有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n\to 0$；绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛。

引入函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，其中 $\{f_n: E\to\mathbb{C}\}$ 为定义在集 E 上的函数列。$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 收敛定义 $\forall z\in E$，右边的数项级数给出 f 在 z 处的值。

更重要的是一致收敛。

(DEF 4.1.1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 定义在点集 E 上，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛 :$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}_{>0}$，$\forall z\in E$ $[\ n>N \Rightarrow |S_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ ]$　　其中 $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

注意与收敛定义对比，收敛是先选定一点 z_0，然后 $\exists N$ s.t. $|S_n(z_0)-f(z_0)|<\varepsilon$，而一致收敛意味着任意一点处可共用一个 N。

事实上 $\{S_n(z)\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛

定理 4.1.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon \tag{4.1.3}$$

对所有 $z\in E$ 及任意自然数 p 成立.

证明：$\Rightarrow$ 的核心就是 $|S_{n+p}(z)-S_n(z)| \le |S_{n+p}(z)-f(z)| + |S_n(z)-f(z)| < 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ 则是令 $p\to\infty$ 即可得 $|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$。

由于 $\{S_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ 收敛，稍加思考便可从 THM 4.1.2 得出一个一致收敛判别法，所需的充分条件是 $|f_n(z)|\le a_n$ 且 $\sum a_n$ 收敛。

定理 4.1.3 设 $f_n: E\to\mathbb{C}$ 是定义在 E 上的函数列，且在 E 上 $|f_n(z)|\le a_n$，$n=1,2,\cdots$. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

一致收敛的函数列级数具有一些好性质，注意到复分析与实分析中的连续函数区别不大，因而模仿实分析中的证明，就能说明

定理 4.1.4 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛到 $f(z)$，如果每个 f_n ($n = 1,2,\cdots$) 都是 E 上的连续函数，那么 f 也是 E 上的连续函数.

定理 4.1.5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$，如果每个 f_n ($n = 1,2,\cdots$) 都在 γ 上连续，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z. \tag{4.1.4}$$

而由于复分析中求导与实分析区别很大，逐项求导的结论有所不同。它需要的条件弱一些，内闭一致收敛即可。且 f 必全纯。

定理 4.1.9（Weierstrass） 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，如果

(1) $f_n \in H(D), n = 1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$，

那么

(1) $f \in H(D)$;

(2) 对任意自然数 k，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

定义 4.1.6 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 D 的任意紧子集上一致收敛，就称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中**内闭一致收敛**.

显然内闭一致收敛 $\Leftarrow$ 一致收敛.

Ex. 4.1.10. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是 $Re(s)>1$ 上的全纯函数，因为.

$\forall\varepsilon\ \exists N\ [n>N \Rightarrow |\quad|<\varepsilon]$

1°. n^s 在 $Re(s)>1$ 上全纯.

2°. $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^x}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛 $(x>1)$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ 在 $Re(s)>1$ 上一致收敛到 $\zeta(s)$

并且在 $Re(s)>1$ 中，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(s)$ 内闭一致收敛到 $\zeta(s)$.

补充：直观上阐述 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 不是一致收敛的：s 在接近 1 时收敛速度越来越缓慢. 但对任给 $s_0>1$. $Re(s)>s_0$ 内是一致收敛的，这是因为误差项的模

$\left|\frac{1}{m^s} + \frac{1}{(m+1)^s} + \cdots +\right| \leq \frac{1}{|m^s|} + \frac{1}{|m+1|^s} + \cdots < \frac{1}{m^{s_0}} + \frac{1}{(m+1)^{s_0}} + \cdots =: \varepsilon \to 0$, as $m\to 0$.

这里 ε 与 s 无关，因此.

实际上，内闭一致收敛能推出很多结论. 在复分析中，收敛这个条件太弱，推不出什么；区域内一致收敛太强，有很多函数不满足，如 $\frac{1}{1-z}$ 的展开；内闭一致收敛则是刚刚好.

4.2 幂级数

全纯函数有 Taylor 展开，这也是它唯一的一种幂级数展开.

复的幂级数与实的有很多相似点：它有收敛半径和收敛域的概念，只不过收敛域是一个开圆盘而不是开区间；

满足 $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}$，Abel 定理 —— 即 $\sum a_n z^n$ 在 z_0 处收敛 $\Rightarrow$ 它在 $|z|<|z_0|$ 中内闭一致收敛；

在收敛域内，级数的和函数全纯，而在边界上是否收敛相对复杂，相当于问复的 Fourier 级数是否收敛至 $f(z)$

例 4.2.5 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1，它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散.

例 4.2.6 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1，它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛.

例 4.2.7 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1，它在 $z=1$ 处是发散的，但在收敛圆周的其他点 $z=e^{i\theta}$ $(0<\theta<2\pi)$ 处则是收敛的. 则是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

EX 4.2.7 中，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\theta\right\}$，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta\right\}$ 有界. 而 $\frac{1}{n}\to 0$. 因此 Dirichlet 判别法说实部虚部皆收敛.

鉴于不需要，切削极限等内容暂时不写. 请看原书.

4.3 全纯函数的 Taylor 展开

利用无穷阶导数公式以及幂级数的收敛性结论，现在可以严格地证出 $f(z)\in \mathcal{O}(D(z_0,R))$ 收敛至它的 Taylor 级数，证明见练习.

定理 4.3.1 若 $f\in H(B(z_0,R))$，则 f 可以在 $B(z_0,R)$ 中展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ z\in B(z_0,R). \tag{4.3.1}$$

右端的级数称为 f 的 Taylor **级数**.

Taylor 展开又能给我们描述零点的重数，如果 $f\in\mathcal{O}(U)$，$f\not\equiv 0$，而 $f(z_0)=0$. 那么由第三章 3.5 节中零点集离散推导的，

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\quad，其中\ a_m\neq 0.$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^m\left(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots\right).$$

这个 m 应该就是零点的重数，因为在 z_0 处 $(a_m+\cdots a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)=a_m\neq 0$. 类似教书中有另一种等价定义，以及一个充要条件.

定义 4.3.3 设 f 在 z_0 点全纯且不恒为零，如果

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\cdots,f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0,$$

则称 z_0 是 f 的 m **阶零点**.

命题 4.3.4 z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z), \tag{4.3.3}$$

这里，g 在 z_0 点全纯，且 $g(z_0)\neq 0$.

实际上 $(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots)=g(z)$，因为这个幂级数给出了全纯函数. 显然 $g(z_0)=a_m\neq 0$

4.4 辐角原理和 Rouché 定理

有了泰勒展开我们能够研究零点问题.

EX. 假设 $f\in\mathcal{O}(D)$，$z_0\in D$ 是唯一的一个零点，且为一阶的，问有什么公式能在一个给定开集 $W\subseteq D$ 检测出 z_0.

解：会想到有一个找根的公式 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{dz}{z-z_0}=1$ （C 围住 z_0）

研究零点附近 Taylor 展开. $f(z)=(z-z_0)[a_1+a_2(z-z_0)+a_3(z-z_0)^2+\cdots]=:(z-z_0)g(z)$. 其中 $g(z_0)\neq 0$，$g\in\mathcal{O}(D)$

为了出现个分母，想到除多项式的，求导试一试：

$$f'(z)=g(z)+(z-z_0)g'(z).\qquad \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{g(z)+(z-z_0)g'(z)}{(z-z_0)g(z)}=\frac{1}{z-z_0}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$ 注意 $\frac{g'(z)}{g(z)}$ 在 $\overline{D(z_0,r)}$ 内全纯

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\begin{cases}0, & C\ 不围住\ z_0\\ \frac{g'(z)}{\ } & \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \begin{cases} 0, & C\text{不围住 } z_0 \\ 1+\oint_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 1, & C\text{围住 } z_0. \end{cases}$$

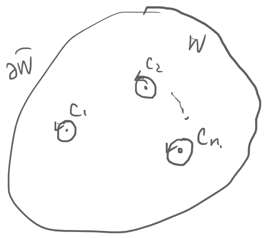
因而对 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 作积分可以检测出一阶零点 z_0.

若 z_0 为m级零点，则 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$，$f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}g(z) + (z-z_0)^m g'(z)$. 于是 $\frac{f(z)}{f'(z)} = m\cdot\frac{1}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$. 积分后为m或0. 于是这积分数了零点的重数.

由之前的结论知道 $f(z)\in\mathcal{O}(D)$ 的零点集离散，又假设挑出一块有界区域 $W\subseteq D$ 的零点，那么只有有限个，假设为n个. 现在运用经典微积分技巧，得

$$\oint_{\partial W}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \cdots + \oint_{C_n}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

其中 m_k 为 C_k 中单个零点的重数.



这就是 THM 4.4.1

定理 4.4.1 设 $f\in H(D)$，γ 是 D 中一条可求长的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点，在 γ 内部有零点

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

它们的阶数分别为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k. \tag{4.4.1}$$

注意 C_i 只绕一圈 z_i，而且 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{dz}{z-z_i} = 1$. 因此我们又称这积分为 C_i 在点 z_i 处的环绕数.

Winding number

Let $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ be a closed curve and let z_0 be a point not in the image of γ. Then the winding number of γ around z_0 is

$$W_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

- Winding number is invariant over homotopy.
- Let z_0 be a point not in the image of γ then $\exists r > 0$ s.t. for $z \in B(z_0, r)$, $W_\gamma(z_0) = W_\gamma(z)$
- The winding number is always an integer.
- The winding number is locally constant.

Generalized Cauchy Integral formula: Let $f : \Omega \to \mathbb{C}$ be holomorphic on Ω and $\gamma : [a,b] \to \Omega$ be a closed curve which is null homotopic. Then for z_0 not in the image of γ,

$$f(z_0)W_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

补充：实际上这定理可推广到亚纯函数的情形，对于 $f\in\mathcal{M}(\Omega)$，

$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ = #(按重数的零点个数) − #按重数的极点个数. 其中要求C上没有f的零极点，其他条件不变.

现在注意 THM 4.4.1 中 LHS 的几何意义

$LHS = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}$，其中 Γ 是曲线 $\gamma: z=\gamma(t)$ 在映射 f 下的像. 有 $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$.

因此 LHS 表示了 $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ 绕原点的圈数. 即 γ 内部零点个数(含重数) = Γ 绕原点的圈数. 这就是辐角原理

定理 4.4.2（辐角原理） 设 $f \in H(D)$，γ 是 D 中的可求长简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中。如果 f 在 γ 上没有零点，那么当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时，函数 $f(z)$ 在相应的曲线 Γ 上绕原点转动的总圈数恰好等于 f 在 γ 内部的零点的个数.

有了辐角原理我们可以证明Rouché定理.

定理 4.4.3（Rouché） 设 $f, g \in H(D)$，γ 是 D 中可求长的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中. 如果当 $z \in \gamma$ 时，有不等式

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \tag{4.4.7}$$

那么 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

证明很简单. 记 $w = \frac{g}{f}$，(4.4.7) $\Leftrightarrow$ $|w-1| < 1$. 因而 w 的轨迹限定在以 $z=1$ 为中心的单位圆内，因而绕原点0圈.

于是 $\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} g(z) - \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = 0 \Rightarrow$ 零点个数相同.

这里记 $h = f - g$，则 $|h| < |f|$. 定理的内容可以这样理解：

假设给 f 在 C 上的值加上一个不太大的扰动 h，得到全纯函数 g，那么在 C 内部，g 的零点个数仍为 f 的零点个数.

THM 4.4.4 和 COR. 4.4.5 略过.

Rouché定理可以证明非常重要的开映射定理，即全纯映射是开映射.

定理 4.4.6 设 f 是域 D 上非常数的全纯函数，那么 $f(D)$ 也是 $\mathbb{C}$ 中的域.

// 书中域的定义：非空连通开集.

TODO：补充 4.4 节全部内容.

第四章 例子及练习

2023年9月6日 15:38

4.2 幂级数

补充说明 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$ 在区域 $D=\{z:|z|<1\}$ 内不是一致收敛的，但它是内闭一致收敛的。

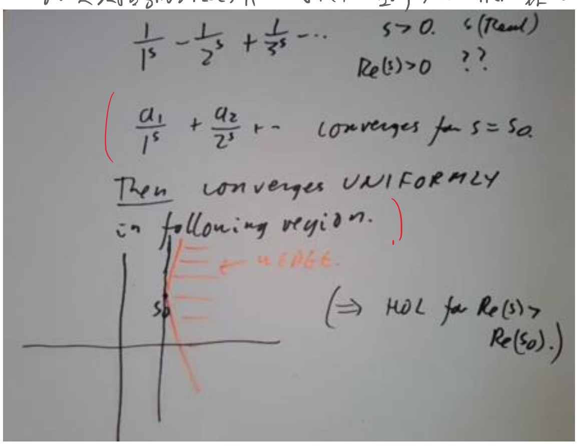
Power series.

$a_0+a_1z+a_2z^2\cdots$ converges for $|z|<R$.

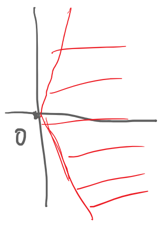
Problem: show it is hol. for $|z|<R$.

Pf.

试证级数的结论，并说明 $(1-\frac{2}{2^s})\zeta(s)$ 的级数在 $Re(s)>0$ 内闭一致收敛。



Wedge 有两条斜线所包围的楔形区域，注意这两条线可以无限地贴近直线，因而才有在 $U=\{s\in\mathbb{C}: Re(s)>Re(s_0)\}$ 内，一致收敛，进而收敛的和函数在任意 U 内全纯。



Pf. 由于可作平移变换，不失一般性，取 $s_0=0$。

此处给两个前置结论

1. 分布求和公式（Abel公式）

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n-A_{m-1}b_m.\quad 其中\ A_l=\sum_{k=1}^{l}a_k$$

2. $\left|\frac{1}{(m+1)^s}-\frac{1}{m^s}\right|$ 的估计：

$$\left|\frac{1}{(m+1)^s}-\frac{1}{m^s}\right|\leqslant\left(\left|\frac{1}{m^s}\right|-\left|\frac{1}{(m+1)^s}\right|\right)\cdot\frac{|s|}{Re(s)}$$

$$\left|\frac{1}{(m+1)^s}-\frac{1}{m^s}\right| \leqslant \left(\left|\frac{1}{m^s}\right|-\left|\frac{1}{(m+1)^s}\right|\right)\cdot\frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}$$

要想说明不太容易，但 $\mathrm{LHS} \leq |s|\cdot\int_m^{m+1} x^{-s-1}\,dx$，$\mathrm{RHS} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}(s)}\int_m^{m+1}|x^{-s-1}|\,dx$

$\leqslant$

现在考虑 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k^s}$. 假设其在 $s=s_0$ 处收敛，我们要证它在之前所说的区域收敛. 只需说明尾项 $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{k^s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\frac{a_k}{k^s}$ 在 $m\to\infty$ 时收敛.

由Abel公式，$\sum_{k=m}^{n}\frac{a_k}{k^s} = \sum_{k=m}^{n}A_k\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{(k+1)^s}\right)+A_n\cdot\frac{1}{n^s}-A_{m-1}\cdot\frac{1}{m^s}$

$$\sum_{k=m}^{n}|A_k|\left(\left|\frac{1}{m^{s_0}}\right|-\left|\frac{1}{(m+1)^s}\right|\right)\cdot\frac{|s|}{s_0}+|A_n|\cdot\frac{1}{n^{s_0}}-|A_{n-1}|\cdot\frac{1}{m^{s_0}}$$

希望 $m>N$ 时 尾项 $<\varepsilon$.. N 与 s 无关.

4.3 全纯函数的 Taylor 展开

定理 4.3.1 若 $f\in H(B(z_0,R))$，则 f 可以在 $B(z_0,R)$ 中展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ z\in B(z_0,R). \tag{4.3.1}$$

右端的级数称为 f 的 Taylor **级数**.