参考资料

2023年9月5日 9:50

1. Richard E. BORCHERDS的课:

   简洁自然，比史济怀补充了更多内容。看完史济怀再看他这个会感觉非常流畅，一步到位。

2. 史济怀《复变函数》

   部分内容有一些蹩脚（没有使用同伦等等语言，并且有些地方积分路径取的方向不太清晰），另外由于写书比较正式，容易让人理不清背后的思路。

3. Complex Analysis (3rd edition) by Lars V. Alhfors
4. Complex Analysis Cheat Sheet by BhorisDhanjal (github user)
5. 复变函数(复分析)基础 - Fraljimetry (Bilibili)

主要是看的2，思路不顺畅的时候用1和3补充，个别地方的理解参考5。 4用于速查结论。

第二章 全纯函数

2023年8月26日 15:31

2.1 复变函数的导数

复变函数的导数定义形式上同实变函数的一致

但是注意 $z\to z_0$ 以及 $\Delta z\to 0$ 有无数种方向.

此外求导法则($+\ -\ \times\ \div$ 复合)与实的情形也类似。也有 可导 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 连续，例子如下.

Ex. 2.1.3 $f(z)=\bar z$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处连续, 但处处不可微.

Pf. 先证连续. $\forall z_0\in\mathbb{C}$ ($z_0 = x_0+iy_0$), $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{x+yi\to x_0+y_0i}(x-yi) = x_0-iy_0 = \bar z_0 = f(z_0)$.

用到的FACT: 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=b$

Justification. "$\Leftarrow$": $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi \iff z\to z_0,\ |f(z)-(a+bi)|\to 0$.

而 $|f(z)-(a+bi)| = |(u(x,y)-a) - i(v(x,y)-b)| = \sqrt{(u(x,y)-a)^2+(v(x,y)-b)^2}$

因此如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=b$, 一定有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi$

"$\Rightarrow$": 注意到 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+bi \iff \lim\limits_{z\to z_0}\overline{f(z)}=a-bi$. 而 $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}$, $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{f(z)-\overline{f(z)}}{2i}$

于是 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{(a+bi)+(a-bi)}{2}=a,\\ \lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i}=b.\end{cases}$ $\square$

再证不可微. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}$. 当 z 沿水平方向靠近 z_0 时, $\overline{z-z_0}=z-z_0$, 此极限为1

当 z 沿竖直方向靠近 z_0 时, $\overline{z-z_0}=-(z-z_0)$, 此极限为 -1.

故极限不存在. $f(z)=\bar z$ 不可微. $\square$

2.2 Cauchy-Riemann 方程

自然问复可微和实可微的关系. 具体来说就是 以下两者

(A): $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 可微,

(B): u, v 作为实函数可微,

首先 (A)$\Rightarrow$(B), 因为 $\mathbb{C}$ 同构于 $\mathbb{R}^2$, 但 (B) $\overset{?}{\Rightarrow}$ (A) 不是很显然. 下面来探索.

(A) $\iff f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\Delta z + o(\Delta z)$ ①

(B) $\iff u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$ $\quad // o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) = o(|\Delta z|)$

$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$

于是 (B) $\Rightarrow f(z+\Delta z)-f(z) = (u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-v(x,y))$ $\quad (\Delta z=\Delta x+i\Delta y)$

$= \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)\right)$

(代入 $\Delta x=\frac{\Delta z+\overline{\Delta z}}{2}, \Delta y=\cdots$) $= \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{\Delta z+\overline{\Delta z}}{2}\right) + \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(\dfrac{\Delta z-\overline{\Delta z}}{2i}\right) + o(|\Delta z|) + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\left(\dfrac{\Delta z+\overline{\Delta z}}{2}\right) + \dfrac{\partial v}{\partial y}\left(\dfrac{\Delta z-\overline{\Delta z}}{2i}\right)\right)$

$= \dfrac12\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta z + \dfrac{\partial u}{\partial x}\overline{\Delta z} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta z - \dfrac{\partial v}{\partial y}\overline{\Delta z}\right) + \dfrac12 i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta z + \dfrac{\partial v}{\partial x}\overline{\Delta z} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta z + \dfrac{\partial u}{\partial y}\overline{\Delta z}\right) + o(|\Delta z|)$

$= \dfrac12\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta z + \dfrac12\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} + i\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$

$= \dfrac12\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \dfrac12\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) = \dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$ ②

将 $f(z)$ 视成 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ 才这么写的. $f(x,y)=f\left(\dfrac{z+\bar z}{2}, \dfrac{z-\bar z}{2i}\right)$

注意到 $\begin{cases} z = x+iy\\ \bar z = x-iy\end{cases}$

所以有 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac12\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac12\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

因而定义算子 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

△ 当写出 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ 时，要把 $f(z)$ 看作 $f(x,y) = f(x(z,\bar z), y(z,\bar z))$，其中 $x(z,\bar z) = \frac{z+\bar z}{2}$，$y(z,\bar z) = \frac{z-\bar z}{2i}$

由①，$f(z)$ 在 z_0 处实可微 $\Leftrightarrow$ $f(z)-f(z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}\Delta z + \left.\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|_{z_0}\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$

由②，$f(z)$ 在 z_0 处(复)可微 $\Leftrightarrow$ $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$

因此有 THM. 2.2.3

定理 2.2.3 设 f 是定义在域 D 上的函数，$z_0 \in D$，那么 f 在 z_0 处可微的充要条件是 f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$. 在可微的情况下，$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

证 如果 f 在 z_0 处可微，由 2.1 节的 (2.1.2) 式得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

与 (2.2.4) 式比较就知道，f 在 z_0 处是实可微的，而且 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

反之，若 f 在 z_0 处实可微，且 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$，则由 (2.2.4) 得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

由此即知 f 在 z_0 处可微，而且 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. □

可能说的不太清晰，要注意到 $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|_{z_0}$ 是个定值，而 Δz 是某范围内一个小量，$\overline{\Delta z}$ 是其共轭，两者通常不共线(线性无关)。而且 Δz 和 $\overline{\Delta z}$ 模长一致的，因而即使上下均出现 $o(|\Delta z|)$，也只有 $\overline{\Delta z}$ 的系数为 0，Δz 的系数为 $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$ 才能让两个式子等价。

补充：此时也有 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + i v_x$

原因是 $f'(z)$ 的极限定义下，取实轴平行的方向趋进，可知

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

THM C-R 方程：$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 复可微

当然也可以写出其等价形式(与 u, v 相关的)。

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}}$$

Ahlfors 给一种更简单的想法。

$f(z)$ 可微 $:\Leftrightarrow$ 极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} =: f'(z)$ 存在。$(h \in \mathbb{C})$ 那么若 $f(z)$ 可微，则

1° h 取实数时 极限为 $f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

注意 $h\in\mathbb{R}$ 时，y 无变动，视作常量。

2° $h = ik$ $(k\in\mathbb{R})$ 时，极限仍为 $f'(z) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}}\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}}\frac{f[x+i(y+k)] - f(x+iy)}{k}\cdot(-i) = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

因而 $f(z)$ 可微时必有 $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$，进而 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

对于 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ 以及复可微条件的利用，见例题、习题。

DEF. (区域 / 域)

$D \subseteq \mathbb{C}$ 是一个区域 $:\Leftrightarrow$ D 是 $\mathbb{C}$ 中的非空连通开集

下设 D 是一个区域，以后也是默认 D 是区域。

记 $C^1(D) := \{D \xrightarrow{f} \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上连续$\}$ 注意不是 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z}$，也不只是指 u, v 对 x 和 y 的偏导连续。

则对于 $f \in C^1(D)$，f 必为实可微(即 u 和 v 作为 x, y 的函数可微)，因为

则对于 $f \in C^1(D)$，f 必定实可微（即 u 和 v 作为 x, y 函数可微），因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.\ \text{皆连续}$$

注意到 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 为实值函数，因而 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $i\frac{\partial v}{\partial x}$ 的间断点无法相互消除。故 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 连续；同理 u_y, v_y。

再使用多元微积分中的定理：u_x, u_y 连续 $\Rightarrow$ u 可微。

/* $u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y) - u(x,y)$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + o(\Delta x) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta y + o(\Delta y)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + o(\Delta y)\right]\cdot\Delta x + o(\Delta x) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta y + o(\Delta y)$$

$$= \cdots\cdot\Delta x + \cdots\cdot\Delta y + o(\Delta y)\Delta x + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

注意到 $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ 时 $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$\Delta x$ 和 $\Delta\rho$ 同阶或高阶，Δy 和 $\Delta\rho$ 也是同阶或高阶

因而 $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + o(\Delta\rho)$. */

以后可知我们有 $\boxed{\mathcal{O}(D) \subset C^\infty(D) \subset C^k(D) \subset C^1(D) \subset C(D)}$.

关于调和函数的相关结论见习题。可以说明 $f \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow u, v$ 调和，并且单连通区域内的调和函数 u 必有其共轭调和 v.

2.3 导数的几何意义

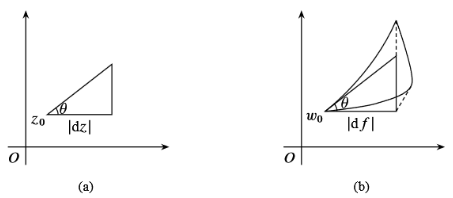
当 $f(z)$ 可导（复可微）时，可以问 $f'(z)$ 有什么几何意义。习题中知道 $|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$

由于复数可由模长和辐角确定，可研究 $f'(z)$ 的模长和辐角。

$\boxed{\text{可以说明 } f(z) \in \mathcal{O}(D) \text{ 是一共形映射.}}$ 推导见习题.

此处记下共形映射的定义，共形映射是一种保局部形状（保夹角和长度比例不变）的映射。以全纯映射 f 为例。

综合导数辐角和模的几何意义，我们看到：如果 $f'(z_0) \neq 0$，在 z_0 的邻域中，作一个以 z_0 为顶点的小三角形，这个小三角形被 f 映射为一个曲边三角形，它的微分三角形和原来的小三角形相似（图 2.3）。因此，我们把这样一个映射称为**共形映射**.



保夹角是指：

线在该点的切线的夹角），右端是曲线 γ_1 和 γ_2 在 z_0 处的夹角。(2.3.2) 式说明，如果 $f'(z_0) \neq 0$，那么在映射 $w = f(z)$ 的作用下，过 z_0 点的任意两条光滑曲线的夹角的大小与旋转方向都是保持不变的。我们把具有这种性质的映射称为在 z_0 点是**保角的**。这样，我们已经证明了

保比例是指

这说明像点之间的距离与原像之间的距离之比只与 z_0 有关，而与曲线 γ 无关. 称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的**伸缩率**.

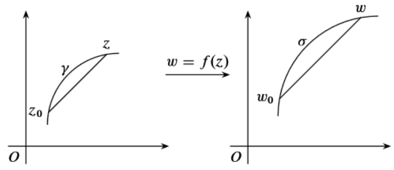


图 2.2

$\boxed{\text{而导数的模长 } |f'(z_0)| \text{ 为 } f \text{ 作为变换的伸缩率，辐角 } \operatorname{Arg} f'(z_0) \text{ 为图形的旋转角度.}}$

2.4 初等全纯函数

有了可微(全纯)，现在研究初等函数。

考虑下三角，反三角，幂函数，指数函数，对数函数. 由 Euler 公式可得三角函数表

三角函数如何定义？实际上是仿照 Euler 公式 $\left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)$. 定义

$$\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{iz}) \end{cases}.$$

而 $\tan z$ 和反三角应该在单叶区域上取反函数即可. 于是三角为指数函数的复合

幂函数实际上也可表成指和对的复合. 因为 $z^\mu = e^{\mu \ln z}$.

于是指、对为最基本的.

§2.4.1 指数函数.

严格来说，e^z 是这样定义的：首先 e^x 有定义. 将 e^{iy} 形式代入实指数函数的泰勒展开得到 $e^{iy} = \cos y + i\sin y$.

继而尝试去定义 $e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$.

用这个定义式能够得到指数函数的各种性质(类似实函数的)，包括

(1) $e^z \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$，进而 $(e^z)' = \frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z$.

(2) $z = x$ 时 $e^z = e^x$. $z = iy$ 时 $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. (兼容性)

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$，$e^z \neq 0$ // 因为 $|e^z| = e^x > 0$.

(4) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

以及一条由三角函数引发的周期性：

(5) $e^{z+2\pi i} = e^z$

由 (3) 可见 $f(z) = e^z$ 处处为共形映射. 可以研究 f 作为映射的几何性质.

由于 $|f(z)| = e^x$，角度由 y 控制且以 2π 为周期. 故无限长且宽为 2π 的平面在 f 下的像就能覆盖整个复平面。

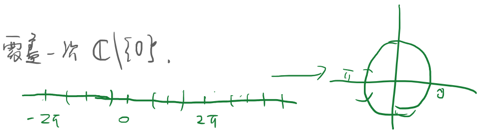
举例来说，带状区域 $D_1 = \{z = x+iy : 0 < y < \pi\}$ 变为上半平面 $H^+ = \{z : y > 0\}$. 带状区域 $D_2 = \{z : -\pi < y < 0\}$ 变为下半平面 $\{z : y < 0\}$

而直线 $\{z : y = 0\}$ 变为射线 $\{z : x > 0, y = 0\}$，直线 $\{z : y = \pi\}$ 变为射线 $\{z : x < 0, y = 0\}$，

$D_k =$

而直线 $\{z: y=0\}$ 变为射线 $\{z: x>0, y=0\}$，直线 $\{z: y=\pi\}$ 变为射线 $\{z: x<0, y=0\}$。

因而，每一块 $D_k = \{z=x+iy : x\in\mathbb{R}, -\pi+k\pi<y\le k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 带状区域在 $f=e^z$ 的作用下覆盖一次 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$。



补充：其实不难猜到 $\mathbb{C} \xrightarrow{f=e^z} \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 为一个覆叠映射，而且还是一个万有覆盖。

1° 对于前半句，注意到 $\mathbb{C}\setminus\{0\} \cong \mathbb{R}_{>0}\times S^1$（极坐标，或者 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 用圆铺满），拓扑上 $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$。于是

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\setminus\{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}\times S^1$$

（其中 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的复合为 $f=e^z$）

$\pi: (x,y)\mapsto e^{x+yi}$。并且 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}: x\mapsto e^x$，$\mathbb{R}\to S^1: x\mapsto e^{ix}$ 都是覆盖

因而 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\times S^1 = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 也是覆盖，

此处参考 https://math.stackexchange.com/questions/1045933/how-do-i-prove-ez-is-a-covering-map-using-this-fact

2° 对于后半句，从 f 的角度，它将 $\mathbb{C}$ 分为全等的周期性排列的无穷多个带状区域，因此直觉上 f 就是一个万有覆盖。

补充：共形映射的定义中如果包含双射，那么它就是双全纯映射。（反函数定理）。并且 $f^{-1\prime}(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$，其中 f^{-1} 是 f 的反函数，$w_0=f(z_0)$

参考 Math stackexchange - Conformal Maps and Homeomorphisms

§2.4.2 对数函数

对数的定义来自于指数。$\mathrm{Log}\, z := w$，其中 $e^w = z$。易见 $\mathrm{Log}\, z$ 多值。

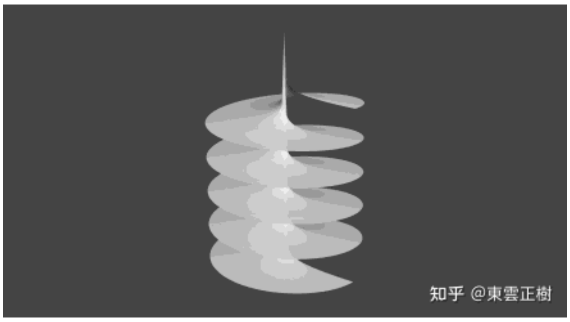
设 $z=re^{i\theta}$，$w=u+iv$，则 $e^u=r$，$e^{iv}=e^{i\theta} \Rightarrow v=\theta+2k\pi$

于是 $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i$.（*）其中 $\arg z$ 为 z 的幅角主值，范围为 $(-\pi,\pi]$

（*由指数函数的表现也能知道 $\mathrm{Log}\, z$ 必定为一个多值函数*）

为了进行单值化，黎曼面的概念呼之欲出。显然可以根据 k 的取值将 $\mathrm{Log}\, z$ 的值分类，每个 k 下的函数值都有一个单值分支，随着自变量 $z\in\mathbb{C}$ 的连续改变，会切换分支。

下图来自知乎东云正树的回答



注意 这里其实是有无穷叶，不是五叶。

这一点很好理解。注意 $\mathrm{Arg}\,\mathrm{Log}\, z = \arg\log z + 2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

黎曼面不深入，但是我们注意到在每一叶上，$\mathrm{Log}\, z$ 变成了双射，并且它就是 $f(z)=e^z$ 限制在对应带状区域上的反函数。

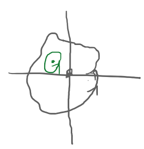
实际上，将 $\mathrm{Log}\, z$ 的取值限制在固定分支后，它就是全纯的。因此也叫全纯单值分支。见例题的 THM 2.4.2。

定理 2.4.2 如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通域，则必在 D 上存在无穷多个单值全纯函数 $\varphi_k, k=0,\pm1,\cdots$，使得在 D 上成立

$$e^{\varphi_k(z)} = z, k=0,\pm1,\cdots;$$

而且对每一个 k，有 $\varphi_k'(z) = \dfrac{1}{z}$。其中的每一个 φ_k 都称为 $\mathrm{Log}\, z$ 在 D 上的**单值全纯分支**.

重看（*）式，切换分支的行为就发生在绕原点走一圈，角度改变 2π 之后。我们称具备这种行为的点为多值函数 $\mathrm{Log}\, z$ 的支点。



但需注意，绕圈中其他点完全可以不切换分支，本质还是原点的特殊性。图里的点中只有原点是支点。支点严格定义如下。

DEF. 2.4.3（支点）

如果当 z 沿着 z_0 的充分小邻域中的任意简单闭曲线绕一圈时，多值函数的值就从一支变到另一支，那么称 z_0 为该多值函数的一个支点。

实际上 $\operatorname{Log} z$ 的支点除原点外还有无穷远点，书上解释为在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内绕原点一圈相当于绕无穷远点一圈。(在THM2.4.2后面)

今后 $\operatorname{Log} z$ 主支记为 $\log z$，有 $\log z = \log|z| + i\arg z$ ，$-\pi < \arg z < \pi$.

§2.4.3 幂函数

一般来说，幂函数应该定义为 $z^{\mu}\ (\mu = x+iy \in \mathbb{C}) = e^{\mu \operatorname{Log} z}$. 在 μ 的很多取值中它会是一个相对复杂的多值函数（多值性来源于幅角），

其中有两种情形值得单独来看.

(1) $\mu = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

此时 $f(z) = z^n$. $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = nz^{n-1}$. 可见 $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ 通常称为整函数

DEF.2.4.4.

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) :\Leftrightarrow f$ 为整函数 (entire function)

考虑其作用. 例如 $f(z) = z^2$. 由于 $\arg f(z) = 2\arg z$. 因此 f 将第一象限（不含实轴、虚轴正向）$\{z: x>0, y>0\}$ 映为上半平面 $\mathcal{H}$

(2) $\mu = \frac{1}{n}$. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$w = z^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow z^n = w$. 易见这也是一个多值函数，并且有 n 个全纯分支. 下面求出其全纯分支和分支点.

设 $z = re^{i\theta}$, $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. 其中 $\theta_0 = \arg z$, 取 $0 < \arg z < 2\pi$

$\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$.

故 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个全纯分支 $w = \varphi_k(z) = \sqrt[n]{|z|}\,(e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}})$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. 此处 $\theta = \arg z$ ，取值 $(0, 2\pi)$

类似 $\operatorname{Log} z$，其分支点也为 $z=0$ 和 $z=\infty$，因为本质上这是由 $\operatorname{Arg} z$ 的多值性决定的.

研究 $g(z) = \sqrt[n]{z}$ 的作用：它将 z 的长度由 $|z|$ 改至 $\sqrt[n]{|z|}$，角度上有 $w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow \arg w = \frac{1}{n}\arg z$.

因而它将整个复平面除去正实轴后单叶地映到角状区域 $\{z: 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$.

幂函数的一般情形见原书.

§2.4.4 三角函数

前面定义过了 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

这样定义出的三角函数也满足加减法、二倍角公式等. 并且零点同实的情况一样：$\sin z$ 仅在 $z = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ 处为零，$\cos z$ 仅在 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 处为零

唯一不同的是：$\cos z$ 和 $\sin z$ 不是有界函数.

在虚轴 $z = iy$ 上，$\cos z = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$. $y \to \infty$ 时 $\cos z \to \infty$.

而 $\sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \cos iy$. 故 $\sin z$ 至少在 $z = \frac{\pi}{2} + iy$ 上无界. （但这不代表不全纯，仅仅是无界而已，没有奇点）

类似实的情形，定义 $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$. 前者在除去 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 的开平面上全纯，后者在除去 $z = k\pi$ 的开平面上全纯

§2.4.5 多值函数 $w = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1} \cdots (z-a_m)^{\beta_m}}$

略过.

2.5 分式线性变换

暂略. 简单讲了 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 这一变换的性质. 包括保圆, 交比作为不变量. 可视为矩阵乘法群 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})\right\}$.
这种变换是双全纯的(扣掉奇点之后). 更多细节如 $SL_2(\mathbb{C})/\sim\ \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ (此处 $M\sim M' :\Leftrightarrow M=\pm M'$) 都没讲...

2.2

Ex. 2.2.5 研究 $f(z)=z^n$，其中 $n\in\mathbb{N}$.（是否可微，是否全纯 $f'(z)=?$）

$f(z)=(x+iy)^n$，二项式展开再分成 $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$，$\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$，易见 $u,v\in\mathbb{R}[x,y]$. 因而 f 实可微.

而将 $f(z)$ 写为 $f\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$ 的形式：$f(z)=\left(\frac{z+\bar z}{2}+i\frac{z-\bar z}{2i}\right)^n = z^n$. 返回只有 z. 因而 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$.

故 $f(z)$ 全纯，且 $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=nz^{n-1}$.

Ex. 2.2.6 研究函数 $f(z)=e^{-|z|^2}$

由于 $\forall z_0\in\mathbb{C}$，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} e^{-|z|^2}=e^{-|z_0|^2}$. 故 f 连续.

$f(z)=e^{-(u^2+v^2)}=e^{-\left[\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar z}{2}\right)^2\right]}=e^{-z\bar z}$，$\frac{\partial f}{\partial z}=-\bar z e^{-|z|^2}$，$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=-z e^{-|z|^2}\neq 0$.

故 $f(z)$ 不全纯.

(PROP. 2.2.8) $u\in C^2(D)$，试证 $\Delta u=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}$，其中 Δ 为 Laplace 算子. $\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

Pf. $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac12\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \implies \frac{\partial^2 u}{\partial\bar z\partial z}=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac12\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$

$=\frac12\left[\frac12(u_{xx}-iu_{xy})+i\cdot\frac12(u_{xy}-iu_{yy})\right]$

$=\frac12\left[\frac12 u_{xx}+\frac12 u_{yy}\right]$

$=\frac14\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac14\Delta u$. 即 $\Delta u=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}$. □

(THM 2.2.9) 设 $f=u+iv\in\mathcal{O}(D)$，试证 u,v 皆调和.

$f\in\mathcal{O}(D)\implies\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$. $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=v_{yx}-v_{xy}$

由 $f\in\mathcal{O}(D)\implies f\in C^2(D)$. 有 $v_{xy}=v_{yx}$.

故 $\Delta u=0$. 即 u 调和.

类似地，$\Delta v=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$，即 v 调和. □

书中的证法. 由 $u=\frac{f+\bar f}{2}$，$v=\frac{f-\bar f}{2i}$，利用 PROP 2.2.8.

并且注意到 $f\in\mathcal{O}(D)$ 意味着 $\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$，$\frac{\partial\bar f}{\partial z}=0$.

那有 $\frac{\partial^2 f}{\partial\bar z\partial z}=\frac{\partial^2\bar f}{\partial z\partial\bar z}=0$. 故 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\bar z}=0$. $\implies\Delta u=\Delta v=0$

$\frac{\partial\bar f}{\partial z}=\frac12\left(\frac{\partial\bar f}{\partial x}-i\frac{\partial\bar f}{\partial y}\right)$
$=\frac12\left[\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$
$=\frac12\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$
$=0$

(THM 2.1.1) 设 u 是单连通域 D 上的调和函数（即 $\Delta u=0$），则存在其共轭调和函数 v 使得 $u+iv=:f\in\mathcal{O}(D)$

$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ①

记 $P=-\frac{\partial u}{\partial y}$，$Q=\frac{\partial u}{\partial x}$. 则 P,Q 关于 x,y 具有一阶连续偏导数. 而且

$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{cases}\overset{①}{\implies}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ②

因此 $Pdx+Qdy$ 是一个全微分，即 $\exists f\in C^2(D)$ s.t. $df=Pdx+Qdy$.

现在求出 f 即可.

$\int^{(x,y)} Pdx+Qdy$

由 ②，积分 $\int_{(x_0,y_0)} Pdx + Qdy$ 与路径无关，因而

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P\,dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q\,dy =: f(x,y).$$ 并且 $\frac{\partial f}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}$

再验证 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. $LHS = -u_{xy} + u_{xy} = 0$，因而 f 调和且存 u 共轭调和，取 $v = f$ 即可. □

习题：

9. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f = u + \mathrm{i}v \in C^1(D)$. 证明：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

特别地，当 $f \in H(D)$ 时，有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'|^2.$$

给出上面等式的几何意义.

Pf. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)\right) = \frac{1}{2}\left[(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)\right]$

$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = \frac{1}{4}\left[(u_x+v_y)^2 + (v_x - u_y)^2\right]$

类似地，$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2 = \frac{1}{4}\left[(u_x - v_y)^2 + (v_x + u_y)^2\right]$

$LHS = u_x v_y - v_x u_y$

$RHS = \frac{1}{4}\left[4u_x v_y - 4v_x u_y\right] = u_x v_y - v_x u_y$. 故 $LHS = RHS$.

2° 当 $f \in H(D)$ 时，$LHS = RHS = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2 = |f'(z)|^2$.

几何意义：换元 $(x,y) \to (u,v)$ 前后微元面积之比.

2. 设 $f \in H(D)$，并且满足下列条件之一：

(1) $\mathrm{Re}\, f(z)$ 是常数；

(2) $\mathrm{Im}\, f(z)$ 是常数；

(3) $|f(z)|$ 是常数；

(4) $\arg f(z)$ 是常数；

(5) $\mathrm{Re}\, f(z) = (\mathrm{Im}\, f(z))^2$, $z \in D$，

那么 f 是一常数.

4. 设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$，证明 Cauchy-Riemann 方程为 ，并且验证当 $f(z)$ 在 z_0 处可微时，$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0))$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Pf. 1° 由 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta & ① \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\cos\theta) = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta & ② \end{cases}$$

同理，

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\sin\theta = v_y\sin\theta + v_x\cos\theta & ③ \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot r\cos\theta = v_y\cdot r\cos\theta + (-v_x)r\sin\theta & ④ \end{cases}$$

一般的 C-R 方程 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ 在此处等价于 $\begin{cases} r\cdot\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ r\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$. 整理后即 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$

2° 由 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$，以及由 ①, ③ $\Rightarrow \begin{cases} u_x\cos\theta - v_x\sin\theta = u_r \\ u_x\sin\theta + v_x\cos\theta = v_r \end{cases} \Rightarrow$

$e^{i\theta}\cdot u_r = (\cos\theta - i\sin\theta)(u_x\cos\theta - v_x\sin\theta)$

$= u_x(\cos^2\theta - i\sin\theta\cos\theta) + v_x(-\sin\theta\cos\theta + i\sin^2\theta)$

$e^{-i\theta}\cdot i\cdot v_r = (\cos\theta - i\sin\theta)\ (u_x i\sin\theta + v_x i\cos\theta) = u_x(i\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) + v_x(i\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)$

故 $e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = u_x(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + v_x(i\cos^2\theta + i\sin^2\theta) = u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$

即 $f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\left(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)\right)$. □

2.3 导数的几何意义

(THM 2.3.1) 全纯函数在其导数不为零的点处是保角的.

Pf. 先计算 f 作用下角度的,任意曲线的像,其切线的角度为多少.

具体地,设 f 在 $z=z_0$ 处全纯, $\gamma: [0,1] \longrightarrow D$ 为在 $z=z_0$ 处光滑的曲线,曲线方程为 $z=\gamma(t)$, $t\in[0,1]$. 不妨设 $\gamma(0)=z_0$

记 γ 在 f 下的像为曲线 σ, 其方程为 $w=\sigma(t)=f(\gamma(t))$, $t\in[0,1]$.

γ 在点 z_0 处的切线与 x 轴正向夹角为 $\mathrm{Arg}\,\gamma'(0) =: \theta$

σ 在点 $f(z_0)$ 处的切线与 x 轴正向夹角为 $\mathrm{Arg}\,\sigma'(0) = \mathrm{Arg}[f'(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)] \overset{f'(z_0)\neq 0\text{时.}}{=} \mathrm{Arg}\,f'(z_0) + \mathrm{Arg}(\gamma'(0)) = \mathrm{Arg}\,f'(z_0) + \theta$

由此可见,在 f 的作用下 γ 的切线夹角改变值为 $\mathrm{Arg}\,f'(z_0)$

于是对于任意在 z_0 处光滑的曲线 γ_1, γ_2, 其切线夹角为 $\mathrm{Arg}\,\gamma_1'(0) - \mathrm{Arg}\,\gamma_2'(0)$. // 不妨设 γ_1, γ_2 为起点.

而在 f 的作用下得到的 σ_1, σ_2, 其切线夹角为 $(\mathrm{Arg}\,f'(z_0) + \mathrm{Arg}\,\gamma_1'(0)) - (\mathrm{Arg}\,f'(z_0) + \mathrm{Arg}\,\gamma_2'(0)) = \mathrm{Arg}\,\gamma_1'(0) - \mathrm{Arg}\,\gamma_2'(0)$. 保持不变.

因而,若 $f\in\mathcal{O}(D)$ 且 $f'(z_0)\neq 0$, 则 f 是一个保角映射. □

(书 P37 正文) 符号同上,试说明 f 在 $z=z_0$ 处局部是保比例的.

现考虑 γ 各点距离和其像 σ 对应各点距离之比 ($z=z_0$ 处附近的), 以及在 $z=z_0$ 局部

$$\frac{|f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))|}{|\gamma(t) - \gamma(0)|}$$

的值. 注意 $t\to 0$ 时. $\gamma(t)\to z_0$. 于是 这比值要求出.

$$L = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| .$$ 显然. $$L = \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = |f'(z_0)|.$$

于是对任意的 γ, 经过 f 作用后 在 $z=z_0$ 附近 相应点距离增长了 $|f'(z_0)|$. 这个增长比例与 γ 的选取无关. 因而 f 在 $z=z_0$ 处保比例. □

2.4 初等全纯函数

(书 P41 正文) 试证 $e^z := e^x(\cos y + i\sin y) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Pf. 由 C-R 方程,易得。懒得写了. □

试证 THM 2.4.2

定理 2.4.2 如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通域,则必在 D 上存在无穷多个单值全纯函数 $\varphi_k, k=0,\pm1,\cdots$, 使得在 D 上成立

$$e^{\varphi_k(z)} = z, k=0,\pm1,\cdots;$$

而且对每一个 k, 有 $\varphi_k'(z) = \frac{1}{z}$. 其中的每一个 φ_k 都称为 $\mathrm{Log}\,z$ 在 D 上的**单值全纯分支**.

对于 $z = re^{i\theta}$, 取 $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, 其中 $\theta_0 = \arg z \in (0, 2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

固定 k, 令 $w_k = \varphi_k(z) := \log|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \log|r| + i\theta$, 下面验证 C-R 方程.

$w_k = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$. 并且有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial\theta} = 1$$

在区域 D 内 $\left(\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right.$ 成立. 因此 $\varphi_k(z)\in\mathcal{O}(D)$ $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$ [illegible]

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$，$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$，$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$

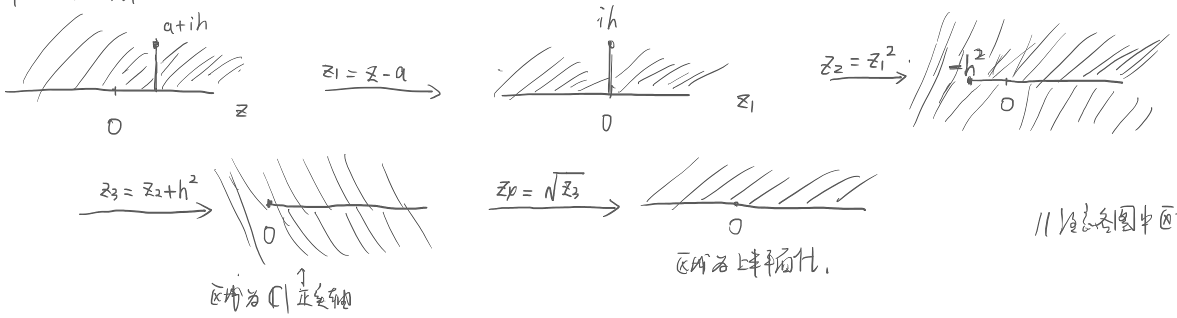
在区域D内，$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$ 成立. 因此 $\varphi_K(z) \in U(D)$. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$. 注意在极坐标形式C-R方程推导中

(注意 $0 \notin D, \infty \notin D$)

$\begin{cases} u_r = u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta \quad u_\theta \\ v_r = v_x \cdot \cos\theta + v_y \cdot \sin\theta = v_x \cdot \cos\theta + u_x \cdot \sin\theta \end{cases}$

(P45, Ex.2.4.5) 求一保角变换，将除去线段 $l = \{z: z = a+iy, 0<y<h\}$ 的上半平面映成上半平面.

解：一步一步来.



// 注意各图中区域均不含实轴和点.

因此所求变换为 $z_4 = \sqrt{z_3} = \sqrt{z_2 + h^2} = \sqrt{z_1^2 + h^2} = \sqrt{(z-a)+h^2}$，即 $f = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}$.

习题 2.4.

24. 设单叶全纯映射 f 将域 D 一一地映为 G，证明：G 的面积为
$$\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Pf. 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. $G = f(D) = \{w = u(x,y) + iv(x,y),\ x+yi \in D\}$. 视为 $\mathbb{R}^2$ 上的区域. 以 u, v 为坐标则 $G = \{w = u+iv,\ u+iv \in G\}$. 在 f 的映射下，面积微元 $dxdy$ 被打到 $dudv$，而 $dxdy$ 与 $dudv$ 的面积之比例为 $J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$. 由 $f: D \to G$ 全纯同胚，
$J = u_x^2 + v_x^2 = |u_x + iv_x|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = |f'(z)|^2$. 因而有
$$\iint_G dudv = \iint_D J\, dxdy = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy.$$

25. 设 f 是域 D 上的单叶全纯映射，$z = \gamma(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 是 D 中的光滑曲线. 证明：$w = f(\gamma(t))$ 的长度为
$$\int_\alpha^\beta |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Pf. 由 $z = \gamma(t)$，$w = f(\gamma(t))$，$d|z| = d|\gamma(t)| = |\gamma'(t)|dt \Rightarrow d|w| = d|f(\gamma(t))| = |f'(z)|\, d|z| = |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$.

故 w 的长度为 $l = \int_{w_1}^{w_2} d|w| = \int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} d|f(z)| = \int_\alpha^\beta d|f(\gamma(t))| = \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|' dt = \int_\alpha^\beta |f'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$. □