第三章 全纯函数的积分表示

2023年9月1日 10:10

3.1 复变函数的积分

复变函数的积分与实变函数积分的定义类似．这里只考虑单变量的情形．不过与实变不同的是，变量 z 是在 $\mathbb{C}$ 上沿曲线连续变动的．

仍从黎曼和出发：设 γ 为一段可求长的光滑曲线，方程为 $z=\gamma(t)$，$(a\le t\le b)$．在 γ 上取定 $z_0,\cdots,z_n$，其中 $z_0=\gamma(a)$，$z_n=\gamma(b)$．

记 s_k 为弧 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 的长度，设 $\lambda=\max\{s_k: 1\le k\le n\}$．取 ζ_k 为弧 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 的任意一点．

考虑黎曼和 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})$，若当 $\lambda\to 0$ 时，无论 ζ_k 如何选取都有固定的极限值 L，则定义积分．

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k-z_{k-1}) = L.$$

注意到 $z_k-z_{k-1} = (x_k-x_{k-1})+(y_k-y_{k-1})i = \Delta x_k+\Delta y_k i$，记 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

那么
$$\begin{aligned} f(z_k)(z_k-z_{k-1}) &= \big(u(x_k,y_k)+iv(x_k,y_k)\big)(\Delta x_k+i\cdot\Delta y_k) = \big(u(x_k,y_k)+iv(x_k,y_k)\big)\Delta x_k + \big(-v(x_k,y_k)+iu(x_k,y_k)\big)\Delta y_k \\ &= \big[u(x_k,y_k)\Delta x_k - v(x_k,y_k)\Delta y_k\big] + i\big[v(x_k,y_k)\Delta x_k + u(x_k,y_k)\Delta y_k\big] \end{aligned}$$

可以看出 $\int_\gamma f(z)\,dz$ 的定义与第二类曲线积分相兼容，事实上它们的关系就是

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy}$$

从形式上可以这样记：$f(z)\,dz = (u+iv)(dx+idy) = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx+u\,dy)$

由此又能导出参数化的积分公式，视 $x=x(t)$，$y=y(t)$．由第二类曲线积分的公式恰能得到一个漂亮的结果．

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}$$

复积分有一系列性质可由线积分直接继承过来：(对函数的)线性性，区间可加性等．此外由于积分值为复数故没有大小之说，但其模长也有differential估计

PROP 3.1.6　若 γ 长度为 L，$M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$．则

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le ML.$$

正确性很好论述，直接从黎曼和考虑：$\left|\sum f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum\left|f(\zeta_k)\Delta z_k\right| = \sum|f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum M|\Delta z_k|$．

3.2 Cauchy 积分定理

既然复变函数的积分与实变函数的第二类线积分相兼容，就自然期望复积分也有"积分与路径无关"或者说沿闭曲线积分为0的情况．

事实上我们有 Cauchy－Goursat 定理．

定理 3.2.3（Cauchy-Goursat）　设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，如果 $f\in H(D)$，那么对 D 中任意的可求长闭曲线 γ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

一个弱版本的定理是加上 $f'\in C(D)$ 这一条件．由 Cauchy 于1824年证出．实际上可以直接用 Green 公式推出．推导见课本．

而 THM 3.2.3 的条件中，全纯这一条件就可放宽到 γ 内部，而在 γ 上只需要连续即可。

定理 3.2.4　设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部，若 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

这个定理证明起来较难，书中给出的证明也是加了两个条件的：① γ 分段光滑．② 在 D 中存在一点使得其发出的每条射线都与 γ 只有一个交点．因此不证了．

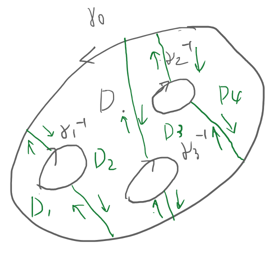
更常用的是将其推广为 D 是 多连通区域的情形.

定理 3.2.5 设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部，D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域，用 γ 记 D 的边界. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，那么

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{3.2.4}$$

这里，积分沿 γ 的正方向进行. (3.2.4) 式也可写为

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z, \tag{3.2.5}$$



此处积分沿正向进行，意思是 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} + \gamma_3^{-1}$ （$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 默认取逆时针方向）. 下面以 $n=3$ 为例来证.

Pf. 连接辅助线. 由 THM 3.2.4, $\oint_{\partial D_i} f(z)dz = 0$. $1 \le i \le 4$, 其中 ∂D_i 全部为正向.

又注意到 $\sum_{i=1}^{4} \partial D_i = \gamma_0 + \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} + \gamma_3^{-1} = \gamma$ (连接辅助线被正负抵消了) 因而

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{\sum_{i=1}^{4}\partial D_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4}\int_{\partial D_i} f(z)dz = 0.$$

□

3.3 全纯函数的原函数

探究一下微积分基本定理、先定义原函数的概念.

DEF. 3.3.1 设 $f: D \to \mathbb{C}$, 若存在 $F(z) \in H(D)$ 使得 $F'(z) = f(z)$ 则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数.

在实分析中，连续 $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数存在，并且 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. $a < x \le b$.

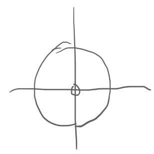
然而在复分析中没有那么简单. 我们要考虑区域 D 的拓扑性质. 从之前积分以及 Cauchy - Goursat 定理的经验，D 是单连通或多连通可能是很重要的.

当然 f 的性质也重要，不过先看区域 D 的性质对原函数存在与否的影响.

(P82. 正文. EX) 设 D 为单位圆盘挖去原点，$f(z) = \frac{1}{z} \in H(D)$. 试说明 $f(z)$ 没有原函数.

Pf. 假设 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，即 $F'(z) = f(z)$. 取 γ 为半径为 r $(r<1)$ 的逆时针圆周，则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma}\frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (\text{由例 } 3.1.4)$$



这里就会导出一个矛盾，因为

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} F'(z)dz = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\gamma'(t)dt \qquad // \gamma(t) = re^{it}.\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$= F(\gamma(t))\Big|_0^{2\pi} = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0. \ne 2\pi i.$$

因此假设有误，$f(z)$ 没有原函数.

□

补充：实际上只要 γ 是一光滑的，围住原点一圈的闭曲线. $\int_{\gamma}\frac{dz}{z} = 2\pi i$，只要 γ_1, γ_2 在被积函数的全纯区域内同伦即可.

实际上，问题在于 D 不是单连通的. 若 $f \in H(D)$ 且 D 是单连通区域，则原函数一定存在.

在实分析中. Newton-Leibniz 公式的证明中使用了积分变上限函数这一有力工具，此处我们也引入类似的东西，我们想知道

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \quad F'(z) \overset{?}{=} f(z).$$

此处 $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ 为一个定点，$F(z)$ 的定义域设为 D (或 D 的内部)，并且假定 D 是单连通区域. 那么结果是 $F'(z) = f(z)$ 成立. (THM 3.3.2, 用 ε-δ 语言证明).

类似于微积分中的 Newton-Leibniz 公式，我们有

定理 3.3.4 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D)$，Φ 是 f 的任一原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

证 证明方法也与微积分中一样. 由定理 3.3.3 知，由变上限积分确定的函数 F 是 f 的一个原函数，因而

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0.$$

故由第 2 章习题 2.2 的第 1 题知道 $\Phi(z) - F(z)$ 是一个常数，因而

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0) = \Phi(z) - \Phi(z_0). \qquad \square$$

现在设 D 是多连通域，$f \in H(D)$，一般来说

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是一个多值函数，它在 z 点的值将随着连接 z_0 和 z 的曲线变化而变动. 下面看一个具体的例子：

设 $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$，则 D 是一个二连通域，$f(z) = \dfrac{1}{z}$ 是 D 中的全纯函数，我们来研究积分

$$\int_1^z \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

如果连接 1 和 z 的曲线 γ 不围绕原点（图 3.7），那么 $\dfrac{1}{\zeta}$ 沿 γ 的积分等于在实轴上从 1 到 $|z|$ 的积分与圆弧 γ' 上的积分之和，即

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^{\arg z}\frac{\mathrm{i}|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta = \log|z| + \mathrm{i}\arg z = \log z.$$

由此可见，随着绕原点圈数的不同，一般可得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \log z + 2k\pi\mathrm{i}, k = 0, \pm 1, \cdots,$$

这恰好是对数函数 $\mathrm{Log}\, z$. 所以，对数函数也可用变上限的积分来定义.

3.4 Cauchy积分公式

考察如下积分值

$I(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$. 其中 γ 为环绕 z 一圈的光滑闭曲线. 设 γ 所围区域为 D, $f \in H(D)\cap C(\overline{D})$.

由于 Cauchy 积分公式表明了在 D 内同伦的曲线积分值相同，故我们可以取 $\gamma_\rho := \{w : |w-z| = \rho\} \subset \overline{D}$，方向逆时针，那么有

$I(z) = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.

γ_ρ 的半径可以取得很小，这时 $f(\zeta) \approx f(z)$，而 $\oint_{\gamma_\rho}\frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i$，因此 $I(z) \approx \oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i f(z)$.

它们相差 $\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$，随 $\rho \to 0$，其内部 $\to f'(\zeta)$，而整个积分 $\to 0$.

事实上，使用长大不等式和 ε-δ 语言可以证明这个值就是 0，从而 $I(z) = f(z) = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$

定理 3.4.1 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f \in H(D)\cap C(\overline{D})$，那么对任意 $z \in D$，均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.4.1}$$

证明见课本，实际上思路已经在上面讲了大半。

这个定理表明 $f \in H(D)$ 在 D 内的值由其在 ∂D 上的值确定. 另一方面，(3.4.1) 式也给出一种全纯函数的积分表示.

又可以考虑给定 ∂D 的值，其内部的值大小如何. 事实上这个问题也可以用 Cauchy 公式回答一部分

$\left|f(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot \gamma\text{的长度}\cdot \sup_{w\in\gamma}\left|\frac{f(w)}{w-z}\right|$. 可以取 γ 为半径 r 的圆弧.（其中 $\gamma \subset \overline{D}$），于是

$RHS = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \sup_{w\in\gamma}|f(w)| \cdot \frac{1}{r} = \sup_{w\in\gamma} f(w)$.

于是对 $z\in D$，$|f(z)| \leq \sup_{w\in\gamma}|f(w)|$. 这是极大模原理的初等版本 .

Cauchy积分公式还说明全纯函数有任意阶导数 $f^{(n)}(z)$. 为此，先给出一个定理

定理 3.4.2 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的可求长曲线，g 是 γ 上的连续函数，那么由 Cauchy 型积分确定的函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

在 $\mathbb{C}\backslash\gamma$ 上有任意阶导数，而且

$$G^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, n = 1, 2, \cdots . \tag{3.4.4}$$

注意此处不要求 γ 是闭曲线，也不要求 γ 光滑 .

书上使用了归纳法来证明这个定理，使用了估值，放缩和极限等分析学技巧 . 此处不证 .

重要的是，由 THM3.4.1 和 3.4.2 能立即推出全纯函数导数的积分表示

定理 3.4.3 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，那么 f 在 D 上有任意阶导数，而且对任意 $z \in D$，有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, n = 1, 2, \cdots .$$

RHS 良定义，不过我们希望将 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$ 这一条件弱化为 $f\in H(D)$.

事实上，对于开区域 D，取其中任意一点 z_0，总能找到一个小的圆形闭邻域被 D 所包含，因而 f 在 D 内的点有任意阶导数 . 即

定理 3.4.4 如果 f 是域 D 上的全纯函数，那么 f 在 D 上有任意阶导数.

RMK . 回看公式

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \implies G^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

.（其中 γ 为可求长曲线，$g(z)$ 在 γ 上连续 .）

注意若记 $h(z) := \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)}$，则 $h'(z) = \frac{-g(\zeta)\cdot(-1)\cdot 1}{(\zeta - z)^2} = 1\cdot\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$，$h''(z) = 1\cdot\frac{-g(\zeta)\cdot 2(\zeta - z)\cdot(-1)}{(\zeta - z)^4} = 1\cdot 2\cdot\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^3}$

$\cdots$ $h^{(n)}(z) = n!\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$

可见 $G^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right)^{(n)}d\zeta$，$n\in\mathbb{N}$，因此 THM 3.4.2 表明在假设条件下，积分可以和求导换序 .

与 Cauchy 积分定理类似地，这个定理也可推广至复连通全纯区域

定理 3.4.6 设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线，$\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 都在 γ_0 的内部，$\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 中的每一条都在其他 $k-1$ 条的外部，D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的域，D 的边界 γ 由 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 所组成. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则对任意 $z \in D$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

f 在 D 内有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, n = 1, 2, \cdots .$$

相关例子见练习 .

3.5 Cauchy 积分公式的一些重要推论

用expected的结果来说的话，重要推论有

1. 极大模原理的初始版本 .
2. (开区域内)一次可导(复可微) $\Rightarrow$ 无穷次可导
3. Morera 定理 — Cauchy 定理的逆定理 .
4. Liouville 定理 — 有界全纯函数必为常数 .

5. 全纯函数的 Taylor 展开 — 全纯函数一定收敛到其 Taylor 展开，因而是解析的（事实上全纯 $\Leftrightarrow$ 解析）

6. 解析延拓.

史济怀的书在 3.4 和 3.5 节覆盖了 2~4. 另外还有一个 Cauchy 不等式：

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!M}{R^n}, \quad n\in \mathbb{Z}_{>0}, \qquad // f\in \mathcal{O}(D(a,R)), \quad \sup_{z\in D(a,R)} |f(z)| \le M.$$

1,3,4,5 的证明见课本，2 已经给出过. 老头的课直接接上解析延拓. 这里直接按他讲的补充一下.

(THM.) 解析延拓是说假如 U 是连通开集，$D = D(z,\varepsilon) \underset{\text{open}}{\subseteq} U$. 那么给定 $f\in\mathcal{O}(D)$，$\exists!\, g\in\mathcal{O}(U)$ s.t. $g|_D = f$.

这意味着 U 上的全纯函数被（其在）一个小的开圆盘上的值所确定.

Pf.

等价于说 f 长出来的函数 $g, h\in\mathcal{O}(U)$ 一定相等，或者说 $g-h=0$.

证明这一点的关键是说明以下结论：

若 $f\in\mathcal{O}(U)$，$f\not\equiv 0$，则 f 在 U 中的零点是离散的（其零点集的极限点不落在 U 的内部）

这可以用 Taylor 展开来说明，由于 $f\not\equiv 0$ 那么 Taylor 展开系数不全为 0，将非 0 首项系数提出因子会发现提出去的不为 0，剩下的函数也不为 0，于是零点附近没有其它零点.

具体步骤见课本.

有了这一点，那么由于 $g-h|_D = 0$，只能有在 U 上 $g\equiv h$. 于是就证明了给定目标开集 U，解析延拓的唯一性. $\square$

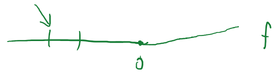
这里的证明可能不严谨，和 Borcherds 讲的有一些出入. Borcherds：假设 z_0 是 f 的零点集 Z 的一个极限点，那么在 z_0 附近 $f(z)\equiv 0$.

否则由 Taylor 级数，它在 0 附近一定不为 0，这就与 z_0 是极限点矛盾. 现在设 V 为 U 的满足 $f|_V\equiv 0$ 的最大开子集，则 V 是闭的（极限点落在 V 中），非空的. 而 U 是连通的，它的闭开子集只有……

因此 $V=U$. 因此只要零点集 Z 不是离散的，必有 $f\equiv 0$. 这就证明了对于 $f\not\equiv 0$，f 的零点集离散. $\square$

RMK. 对于实函数. 如果它是解析的，那么其选定开区间的解析延拓也唯一. 但光滑的实函数未必解析，它的 Taylor 级数不一定在定义域内收敛到自己.

给左边一段开区间，显然可以延拓为 0 函数，和被延拓成 f.

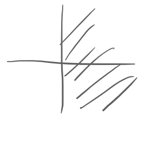


$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

尽管给定一个非空开集 V 和开集 $U\supsetneq V$，以及 $f\in\mathcal{O}(V)$. 不一定能将 f 解析延拓到 U 上（eg. $U=\mathbb{C}$. $f=\frac{1}{z}$, $z\in V\not\ni 0$）. 但实际中感兴趣的函数往往能作一些延拓.

这些延拓能看出函数的更多信息.

EX1. $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$.

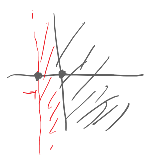


有 $\Gamma(s+1) = \Gamma(s)\cdot s$. 所以 $\Gamma(n+1) = n!$ $(n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$. 是阶乘的推广.

易见 $\Gamma(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 收敛，而且求导可换至积分号内（被积函数可导且下降速度为指数级）

可将 $\Gamma(s)$ 用以下方式延拓

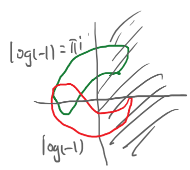
重新定义 $\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}$. 注意 $\Gamma(s+1)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>-1$ 收敛.



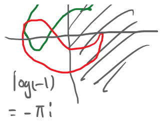
这样一直下去可将 $\Gamma(s)$ 延拓至 $s\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$

EX2. $f=\log(z)$. $\mathrm{Re}(z)>0$.

注意两种延拓不可同时取到.

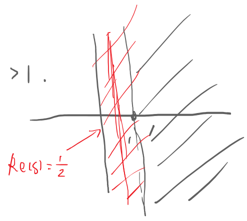


注意两种延拓不可同时做到.



EX 3. $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$. 它的定义收敛至 $Re(s)>1$.

注意 $\zeta(s)$ 在 $Re(s)>1$ 内全纯.



现在解析延拓，方法是试图构造收敛域更大的级数. 凑出一个 $s-1$ 出来:

$$\frac{2\zeta(s)}{2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s}. \quad (Re(s)>1 \text{内收敛})$$

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^s}$$

(注意可收敛序，RHS 收敛域为 $Re(s)>0$)

$$\Rightarrow \zeta(s) = \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^s}. \quad (Re(s)>0)$$ 为原 zeta 函数的解析延拓.

3.6 非齐次 Cauchy 积分公式

本节目的：将 Cauchy 积分公式推广至 C^1 函数类.

前面定义过 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$. 当时是将 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 中的 x 和 y 视为 $\begin{cases} x(z,\bar z) = \frac{z+\bar z}{2} \\ y(z,\bar z) = \frac{z-\bar z}{2i} \end{cases}$.

此外第3章算积分时，如 PROP 3.1.2 的证明有将 $dz = d(x+iy) = dx + i\,dy$ //考虑是在 $\gamma = x(t)+iy(t)$ 上.

另外奇怪的一点是 $\mathbb{C}$ 作为一个平面，我们目前都没有对面积的积分. 接下来考虑从多元实分析继承下来.

以上是引入2-形式的动机. 定义 $dz = dx + i\,dy$, $d\bar z = dx - i\,dy$, 看从实分析角度能够什么.

我们有 $dz\wedge dz = 0$, $d\bar z \wedge d\bar z = 0$ //不必展开验证，因为楔积是交错双线性的.

而 $dz\wedge d\bar z = (dx+i\,dy)\wedge(dx-i\,dy) = 0 - i\,dx\wedge dy + i\,dy\wedge dx + 0. = -2i\,dx\wedge dy$. 这就有了面积微元.

自然地，也要把函数看成 $f(z,\bar z)$. 想法同定义 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ 时一样.

定义 $df(z,\bar z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z =: \partial f + \bar\partial f$. 于是可以记 $d = \partial + \bar\partial$.

1-形式定义完了，来看2-形式. 只需分别算下 ∂ 和 $\bar\partial$ 对1-形式的作用.

$$\partial(f_1 dz + f_2 d\bar z) = \cdots dz\wedge dz + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz\wedge d\bar z = \frac{\partial f_2}{\partial z} dz\wedge d\bar z$$

$$\bar\partial(f_1 dz + f_2 d\bar z) = \frac{\partial f_1}{\partial \bar z} d\bar z\wedge dz + \cdots d\bar z\wedge d\bar z = -\frac{\partial f_1}{\partial \bar z} dz\wedge d\bar z.$$

因此 $$\boxed{d(f_1 dz + f_2 d\bar z) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar z}\right) dz\wedge d\bar z}$$

另外，不论 ∂ 和 $\bar\partial$ 作用在2-形式上都为0. 而 d^2, ∂^2, $\bar\partial^2$ 以及 $\partial\bar\partial + \bar\partial\partial$ 也是0.

有了这些概念和结论，可以直接验算 Green 公式. 见练习.

现在证明复变数形式的 Green 公式:

定理 3.6.1 设 D 和 ∂D 如定理 3.2.5 中所述，如果 $\omega = f_1(z,\bar z)dz + f_2(z,\bar z)d\bar z$ 是域 D 上的一个一次微分形式，这里，$f_1, f_2 \in C^1(\overline{D})$，那么

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \quad (3.6.6)$$

有了 Green 公式，就可以证 Cauchy 公式的一个推广版本，推导很见练习.

定理 3.6.2 设 D 和 ∂D 如定理 3.2.5 中所述，如果 $f \in C^1(\overline{D})$，那么对任意 $z \in D$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{D} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}. \tag{3.6.11}$$

3.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解

讲得好像不清晰，暂时不需要，先跳过，后面有时间看 Mitag-Leffler 再回来看、

第三章 练习

2023年9月1日 10:10

3.1 复变函数的积分

(P69) 试证

命题 3.1.2 如果 $z=\gamma(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$ 是光滑曲线，f 在 γ 上连续，那么

$$\int f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t. \tag{3.1.3}$$

Pf. $LHS=\int u\,dx-v\,dy+i\int v\,dx+u\,dy$. 而由第二类曲线积分公式. 视 $z=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, $u(x,y)=u(x(t),y(t))$, $v(x,y)$ 同理

$dx=x'(t)\,dt$, $dy=y'(t)\,dt$.

$$\int_\gamma u\,dx-v\,dy=\int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma v\,dx+u\,dy=\int_a^b v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)\,dt$$

因此 $LHS=\int_a^b u\frac{dx}{dt}-v\frac{dy}{dt}+i\left(v\frac{dx}{dt}+u\frac{dy}{dt}\right)dt=\int_a^b(u+iv)\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt$

$RHS=\int_a^b f(x(t)+iy(t))\,d(x(t)+iy(t))=\int_a^b(u+iv)\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt$

$\Rightarrow LHS=RHS$. $\square$

例 3.1.3 设可求长曲线 $z=\gamma(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$ 的起点为 α，终点为 β，证明：

$$\int_\gamma \mathrm{d}z=\beta-\alpha,$$

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

Pf. $\int_\gamma dz=\int_a^b\gamma'(t)\,dt=\int_a^b d\gamma(t)=\gamma(t)\Big|_a^b$

$=\gamma(b)-\gamma(a)=\beta-\alpha$.

$\int_\gamma z\,dz=\int_a^b\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b d\gamma^2(t)=\frac{1}{2}\gamma^2(t)\Big|_a^b=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$. $\square$

实际上，如果不是光滑曲线则须使用定义法来证明，也能算出同一结果

例 3.1.4 计算积分 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$，这里，$n$ 是任意整数，γ 是以 a 维中心、以 r 为半径的圆周.

注意到 γ 可以参数化为 $\gamma(\theta)=a+re^{i\theta}$. $\theta\in[0,2\pi]$, 此处 a,r 为常数 . 并且 γ 光滑 .

故 $\int_\gamma\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot re^{i\theta}}{r^ne^{in\theta}}\,d\theta=i\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta$

$$=\begin{cases}-\frac{i}{(n-1)r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}\,d[-i(n-1)\theta]=-\frac{i}{(n-1)r^{n-1}}e^{-i(n-1)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0, & n\neq1\\ i\cdot\frac{1}{1}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i, & n=1\end{cases}$$

☆ 3. 计算积分 $\int_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$.

☆ 7. 设 γ 是可求长曲线，φ 在 γ 上全纯，$\Gamma=\varphi(\gamma)$. 证明：

(1) Γ 也是可求长曲线；

(2) 如果 f 在 Γ 上连续，那么

$$\int_\Gamma f(w)\mathrm{d}w=\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z.$$

∗ 8. 设 γ 是域 D 中以 a 为起点、以 b 为终点的可求长曲线，$f, g \in H(D) \cap C^1(D)$. 证明分部积分公式：

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_a^b - \int_\gamma f'(z)g(z)\mathrm{d}z.$$

∗ 9. 设 γ 是正向可求长简单闭曲线，证明：γ 内部的面积为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_\gamma \bar{z}\mathrm{d}z.$$

∗ 10. 设单叶全纯映射 f 将可求长简单闭曲线 γ 映为正向简单闭曲线 Γ，证明：Γ 内部的面积为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z.$$

这次轴了. 立即推.

∗ 11. 设 f 在 z_0 处连续，证明：

(1) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)$;

(2) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)$.

3.2 Cauchy 积分定理

定理 3.2.1（Cauchy） 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D)$，且 f' 在 D 中连续，则对 D 中任意的可求长闭曲线 γ，均有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

例 3.2.7 设 γ 是一可求长简单闭曲线，$a \notin \gamma$，试计算积分

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

例 3.2.8 设 γ 是一可求长简单闭曲线，$a, b \notin \gamma$，试计算积分

$$I = \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}.$$

2. 设 f 在 $\{z : r < |z| < \infty\}$ 中全纯，且 $\lim_{z\to\infty} z f(z) = A$. 证明：

$$\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} A,$$

3. 设 n 为正整数，试通过计算积分

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

3.3 全纯函数的原函数

3.4 Cauchy积分公式

* **定理 3.4.1** 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，那么对任意 $z \in D$，均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \qquad (3.4.1)$$

直观的思路：在 z 的局部，$f(z) = c + g(z)$，其中 $g(z)=0$，分别考虑两部分积分，并且注意 γ 可以收缩至半径趋于 0，于是对 $g(z)$ 的积分趋于 0（意味着就是 0）（来自 R. E. Borcherds）

下面的证明复现了史济怀，主打一个严谨。

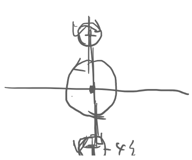
Pf. $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta$. 记式 (3.4.1) RHS 为 $I(z)$，则 $|I(z) - f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right|$

由于 $f \in C(\overline{D})$，对于 $z \in D$，$\zeta \in D$. 给定 $\varepsilon > 0$，则 $\exists \delta > 0$ s.t. $[\,|\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon\,]$

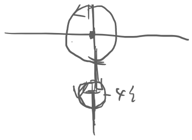
/* 为右侧使用积分估值，需要将 γ 缩小。*/ 取 $0 < \rho < \delta$，设 $\gamma_\rho : \{z : |z| = \rho\}$，方向取逆时针，则 $|I(z) - f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\zeta\in\gamma}\left\{\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right|\right\} \cdot 2\pi\rho$
$< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$，则可见 $|I(z) - f(z)| \to 0$. 于是 $I(z) = f(z)$，即 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. □

例 3.4.5 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}.$$



$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+16)}.$$



原式 $= \frac{1}{16}\left(\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2} - \int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+16}\right)$. 由前例, $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2} = 0$.

记 $\gamma = \{z: |z|=2\}$, $\gamma_1 = \{z: |z-4i|=1\}$, $\gamma_2 = \{z: |z+4i|=1\}$. 方向默认取逆时针.

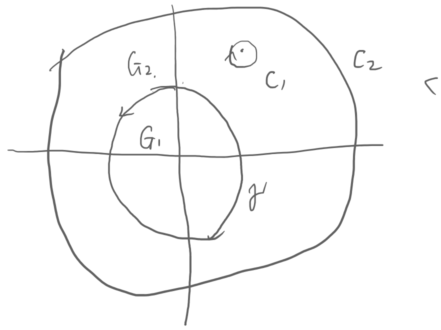
有 $\int_{\gamma^{-1}+\gamma_1^{-1}+\gamma_2^{-1}} \frac{dz}{z^2+16} = 0$. $\Rightarrow$ 原式 $= \frac{1}{16}\int_{\gamma_1+\gamma_2}\frac{dz}{z^2+16}$

而 $\frac{1}{z^2+16} = \frac{1}{8i}\left(\frac{1}{z-4i} - \frac{1}{z+4i}\right)$. $\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{8i}\int\frac{dz}{z-4i} - 0 = \frac{1}{8i}\cdot 2\pi i = \frac{1}{4}$. 同理 $\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{4}$.

因此原式 $= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32}$

例 3.4.7 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}.$$



2. 设 γ 是可求长简单闭曲线, 其内部为域 G_1, 外部为域 G_2. 如果 $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G}_2)$, 而且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} -f(z)+A, & z \in G_2; \\ A, & z \in G_1, \end{cases}$$

这里, γ 关于 G_1 取正向. 通常, 称它为**无界域的 Cauchy 积分公式**.

设 $f(z) = A + g(z)$, $g \in O(G_2)\cap C(\overline{G_2})$, $g(\infty) = 0$. $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{A}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}dw =: I_1 + I_2$.

1° $z \in G_1$ 时, 取 γ' 为以 z 为圆心, r 为半径的小圆 $\subset G_1$, 在 G_1 内有 $\gamma' \simeq \gamma$. 因而 $I_1 = \frac{A}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{dw}{w-z} = \frac{A}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = A$.

C 取半径为 R 的圆且 $C \subseteq G_2$. 有 $R\to\infty$, $I_2 \to 0$

因而 $I_2 = 0$. 故 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = A$. 和 $w=\infty$ 处.

2° $z \in G_2$ 时, 注意 γ' 围住全体区域 G_2. 但 $\frac{f(w)}{w-z}$ 在 $w=z$ 处有奇点. 作一个顺时针小圆 C_1 围住 z. 逆时针大圆 C_2, 半径为 R, 以使 z 在其内部. 围住 C_1 和 γ (相当于围住奇点)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}+C_1+C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw = 0. \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \cdots = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\cdots dw + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}}_{\text{利用1°的结论}} = -f(z) + A.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^{-1}}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)$$

$$f(w) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{故}}}{f(z)} + g(w) \quad \text{因此 } g(z)\to 0$$

5. 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$. 证明:

(1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2f(0) + f'(0)$;

(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2f(0) - f'(0)$.

(**提示:** 分别计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(2+\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

和

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(2-\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

即可.)

6. 利用上题结果证明：设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$，且 $f(0)=1, \operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$，那么

$$-1 \leqslant \operatorname{Re} f'(0) \leqslant 2.$$

※ 7. 设 f 在角状域 $G=\left\{z \in \mathbb{C}: 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$ 中全纯，在 $\overline{G}$ 上连续. 如果 f 在正实轴的区间 $[a,b]$ 上等于零，证明：f 在 G 中恒等于零.

3.5 Cauchy 积分公式的一些重要推论

定理 3.5.1（Cauchy 不等式） 设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，且对任意 $z \in B(a,R)$，有 $|f(z)| \leqslant M$，那么

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, n=1,2,\cdots. \tag{3.5.1}$$

设 $U = D(a,R)$，$\partial U = \overline{U} \setminus U$，则证明

$$f^{(n)}(a) = f^{(n)}\Big|_{w=a} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U} \frac{d}{dw^n}\left|\frac{f(z)}{z-w}\right| dz\Big|_{w=a} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot n!\, dz$$

$$\Rightarrow \left|f^{(n)}(a)\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{\sup|f(z)|}{R^{n+1}} \leqslant \frac{n!M}{R^n}. \qquad \square$$

定理 3.5.2（Liouville） 有界整函数必为常数.

Pf. 设 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$，这意味着任取一个 $a \in \mathbb{C}$，$\forall R \in \mathbb{R}_{>0}$，$[f \in \mathcal{O}(B(a,R))]$. 由 THM 3.5.1，$|f'(a)| \leqslant \frac{M}{R}$. 当 $R \to \infty$ 时，$|f'(a)| \to 0$.
故 $\forall a \in \mathbb{C}$，$[f'(a)=0]$，即 $f'(z)=0$. 而 $f(z) = \int_{z_0}^{z} f'(w)dw + f(z_0) \Rightarrow f(z)=f(z_0)$.
因此 $f(z)$ 必为一常值函数. $\square$

补充：Liouville 定理推广.

设 f 有多项式上界，试证 f 是一个多项式函数.

Pf. 思路类似. 设 $|f(z)| \leqslant M(z) \in \mathbb{C}[z]$. 假设 $\deg M(z) = n$.
由 $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leqslant \frac{(n+1)!M(z)}{R^{n+1}}$. $R \to +\infty$ 时 RHS $\to 0$. 因而 $f^{(n+1)}(z) = 0$.
因此 $f^{(n)}(z)$ 为一个常值函数，设 $f^{(n)}(z) = C$. 积分回去即可得知 $f(z)$ 为一个多项式函数. $\square$

从 Liouville 定理立刻可得

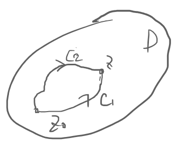
定理 3.5.3（代数学基本定理） 任意复系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 \neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中必有零点.

Pf. 假设 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中无零点，则 $\frac{1}{P(z)} =: f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. 由于 f 无极点，并且 $z \to \infty$ 时 $f(z) \to 0$，因而 $f(z)$ 是一个有界整函数，为常值函数.
但由于 $a_0 \neq 0$，这不可能，矛盾. 因而 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点. $\square$

定理 3.5.4（Morera） 如果 f 是域 D 上的连续函数，且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零，那么 f 在 D 上全纯.



Pf. 考虑围道积分. 固定 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{C}$. 任取 C_1, C_2 均为可求长的，以 z_0, z 为起、终点的曲线.
注意到 $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$. 这是因为 $\oint_{C_1+C_2^{-1}} f(z)\,dz = 0$.
于是 $\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw =: F(z)$ 有定义. 并且 $F'(z) = f(z) \Rightarrow F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $\Rightarrow F''(z) = f'(z)$ 存在 $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $\square$

补充：试证全纯函数有Taylor展开.

Pf. 设 $U \underset{open}{\subseteq} \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$. 则其任意阶导数 $f^{(n)}(z)$ 在 U 中存在、只需要考虑 $f(z)$ 是否等于 $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z-0)^n$.

不失一般性地，设 $0 \in U$.（否则可以平移一下，不改变全纯性）

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

注意直接这样做的困难性. 事实上应该以

$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz$ 为起点，并且猜测 ~~取极限~~ 有积分交换性（毕竟全纯）

将 $\frac{1}{z-w}$ 展开为 w 的幂级数，为 // $f(w) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}w^n$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} + \frac{w}{z^2} + \frac{w^2}{z^3} + \cdots$$

故
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{z^n}f(z)\,dz$$

$$\overset{\text{猜测}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \cdot w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}w^n$$

只需验证等号成立. 事实上，只需要说明收敛性. 验证尾项趋于0即可. 尾项为

$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z}\left[\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n\right]dz$. 注意到 只要 $|w|<|z|$（即 w 在 C 内部）且 $m\to\infty$ 积分值就是0.

因此等式是成立的.

补充：试证 若 $f \in \mathcal{O}(U)$, $f \not\equiv 0$, 则 f 在 U 中的零点是离散的（其零点集的极限点不落在 U 的内部）

Pf. 是可以用Taylor展开来说明. 假设 $f(z_0)=0$.（即 $z_0 \in Z$），我们考虑 $z=z_0$ 处的Taylor展开，它给出一幂级数展开

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. 由于 $f(z)$ 在 U 上不恒为0，因而必定有不为0的系数，因此

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}, \quad (a_m \neq 0.)$$

$$= (z-z_0)^m\left(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \cdots\right)$$

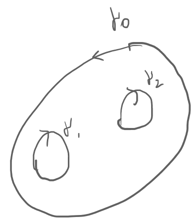
在小邻域 $D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$ 中有 $(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots) \neq 0$.（其极限为 a_m），而且 $(z-z_0)^n \neq 0$. 因此 z_0 附近 $f(z)\neq 0$. 故 Z 是离散集. □

3.6 非齐次 Cauchy 积分公式

现在证明复变数形式的 Green 公式：

定理 3.6.1 设 D 和 ∂D 如定理 3.2.5 中所述，如果 $\omega = f_1(z,\bar z)\mathrm{d}z + f_2(z,\bar z)\mathrm{d}\bar z$ 是域 D 上的一个一次微分形式，这里，$f_1, f_2 \in C^1(\overline{D})$，那么

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega. \qquad (3.6.6)$$



定理 3.2.5 设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 都在 γ_0 的内部，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 中的每一条都在其他 $n-1$ 条的外部，D 是由这 $n+1$ 条曲线围成的域，用 γ 记 D 的边界. ~~如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，那么~~

Pf. $f_1 dz + f_2 d\bar z = f_1(dx + i dy) + f_2(dx - i dy) = (f_1+f_2)dx + (f_1 - f_2) i dy$

$LHS = \oint_{\partial D} (f_1+f_2)dx + (f_1-f_2) i dy = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx dy$

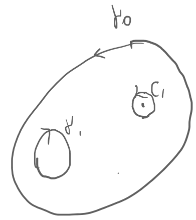
$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z$. 而 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$，$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$，$dz \wedge d\bar z = -2i\, dx \wedge dy$. 因而.

$d\omega = \left[\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(f_2) + \left(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)(f_1)\right] dx \wedge dy = \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\right] dx \wedge dy$

因此 $RHS = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx \wedge dy = LHS$. □

定理 3.6.2 设 D 和 ∂D 如定理 3.2.5 中所述，如果 $f \in C^1(\overline{D})$，那么对任意 $z \in D$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta. \qquad (3.6.11)$$



Pf. 注意被积函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 $\zeta = z$ 处有一个极点，因此用一个小圆 $C_1 = \partial D(z,R)$ 围住它. 令 $D' = D \setminus D(z,R)$，则

$$\oint_{\partial D + C_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \iint_{D'} d\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right) = -\iint_{D'} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta \wedge d\bar\zeta$$

而 $\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) = f(\zeta)\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) + \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z}$

故 $\oint_{\partial D + C_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\iint_{D'} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar\zeta$

$\Rightarrow \oint_{\partial D} \cdots d\zeta = -\iint_{D'} \cdots d\zeta \wedge d\bar\zeta + \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

于是 $RHS = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\iint_{D(z,R)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar\zeta =: I_1 + I_2$.

而 $I_1 := \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $|\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 取 $R < \delta$. 则在 C_1 上 $|\zeta - z| < \delta$. 因而对 $\zeta \in C_1$, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

于是 $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_1} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = \varepsilon$，令 $\varepsilon \to 0$ 可见 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$.

故 $I_1 = 0 + f(z) = f(z)$.

对 I_2 的模进行估值。而且注意也可以令 $R \to 0$.

$|I_2| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left|\iint_{D(z,R)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar\zeta\right|$. 注意到 $d\zeta \wedge d\bar\zeta = -2i\, dx \wedge dy$.

而 $\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}$ 是连续的，而 $D(z,R)$ 是紧的。因而 $\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}(D(z,R))$ 也是紧的，$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}\right|$ 在 $D(z,R)$ 上必有界，不妨设为 M.

$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \pi R^2 \cdot \frac{M}{R} = MR$. 令 $R \to 0$. 可见 $I_2 = 0$. //对比后书此处似乎应该有个2，我倾向于书上错了。但不影响结论.

因而 $RHS = I_1 + I_2 = f(z) + 0 = f(z) = LHS$. 得证. □

3.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解

暂略．